

Moore-ova hranica a (Cayleyho) grafy

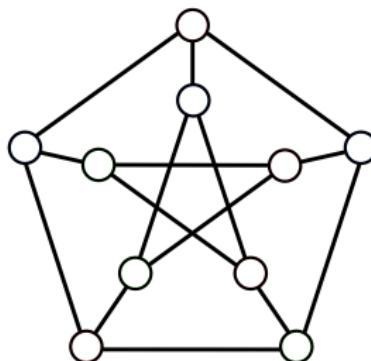
Martin Bachratý
školiteľ: Jozef Širáň

Stavebná fakulta, STU

MiST
7. 1. 2015 – 2016

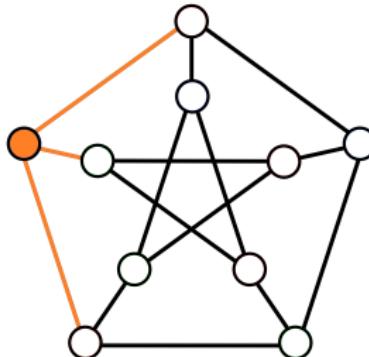
- Problém stupňa a vrchola
- Cayleyho grafy
- Konečné geometrie

Potrebné pojmy



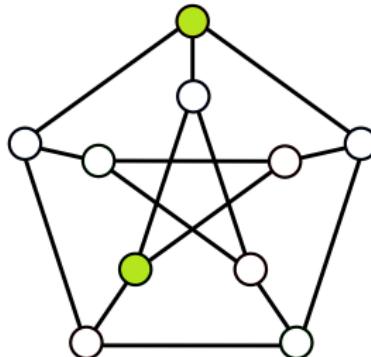
- graf (jednoduchý, neorientovaný, konečný, ...)
- stupeň vrchola
- vzdialenosť vrcholov
- priemer grafu

Potrebné pojmy



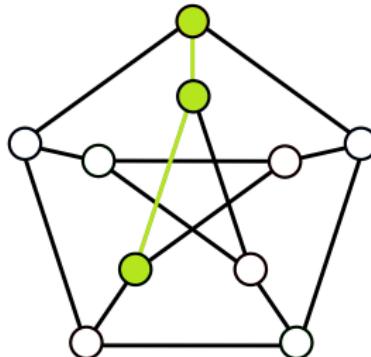
- graf (jednoduchý, neorientovaný, konečný, ...)
- stupeň vrchola
- vzdialenosť vrcholov
- priemer grafu

Potrebné pojmy



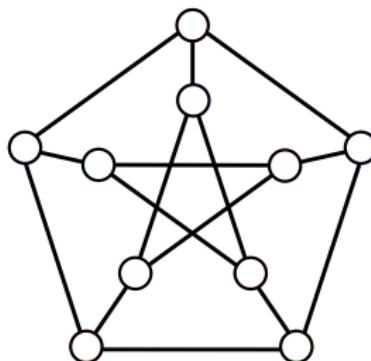
- graf (jednoduchý, neorientovaný, konečný, . . .)
- stupeň vrchola
- vzdialenosť vrcholov
- priemer grafu

Potrebné pojmy



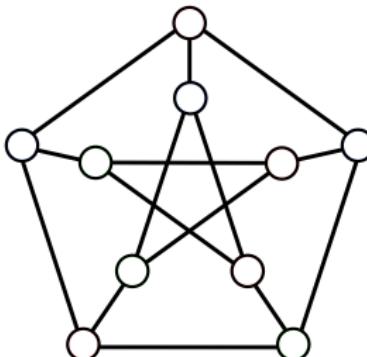
- graf (jednoduchý, neorientovaný, konečný, ...)
- stupeň vrchola
- vzdialenosť vrcholov
- priemer grafu

Potrebné pojmy



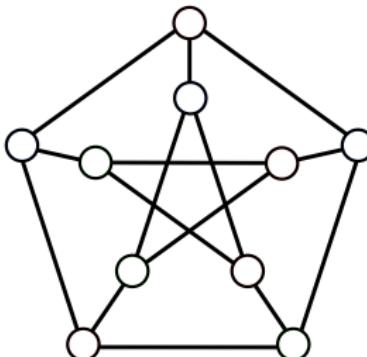
- graf (jednoduchý, neorientovaný, konečný, ...)
- stupeň vrchola
- vzdialenosť vrcholov
- priemer grafu
- mravenisko, facebook

Problém stupňa a vrchola



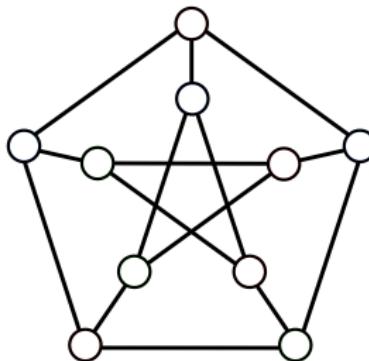
- určiť veľkosť $n(d, k)$ najväčšieho grafu s priemerom k a maximálnym stupňom d
- nájst najväčšie mravenisko, kde z miestnosti ide najviac d chodieb a na návštevy sa dá prísť do k minút
- nájst najväčšiu sieť, najviac d priateľstiev a každý s každým sa pozná cez najviac $k - 1$ známych

Problém stupňa a vrchola



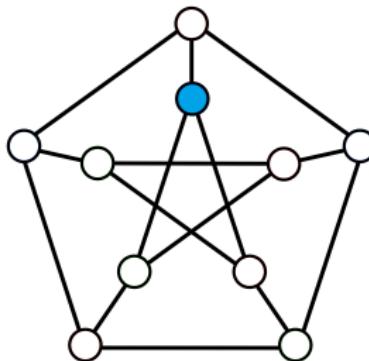
- určiť veľkosť $n(d, k)$ najväčšieho grafu s priemerom k a maximálnym stupňom d
- nájst najväčšie mravenisko, kde z miestnosti ide najviac d chodieb a na návštevy sa dá prísť do k minút
- nájst najväčšiu sieť, najviac d priateľstiev a každý s každým sa pozná cez najviac $k - 1$ známych
- riešenie pre $k = 2$ a $d = 3$?

Problém stupňa a vrchola



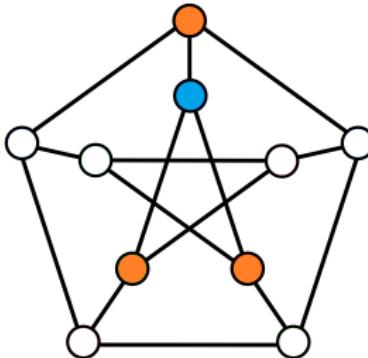
- triviálne prípady — priemer 1 alebo najväčší stupeň 2
- horný odhad $M(d, k) = 1 + d + d(d-1) + \dots + d(d-1)^{k-1} = d^k - o(d^k)$
- $M(d, k) = n(d, k)$ iba pre $k = 2$ a $d = 3, 7$ a možno 57

Problém stupňa a vrchola



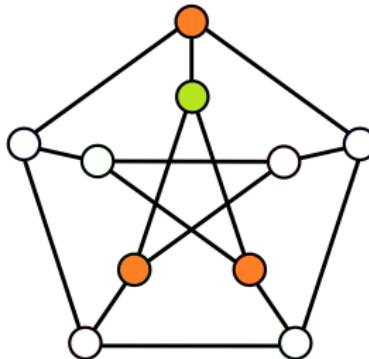
- triviálne prípady — priemer 1 alebo najväčší stupeň 2
- horný odhad $M(d, k) = 1+d+d(d-1)+\dots+d(d-1)^{k-1} = d^k - o(d^k)$
- $M(d, k) = n(d, k)$ iba pre $k = 2$ a $d = 3, 7$ a možno 57

Problém stupňa a vrchola



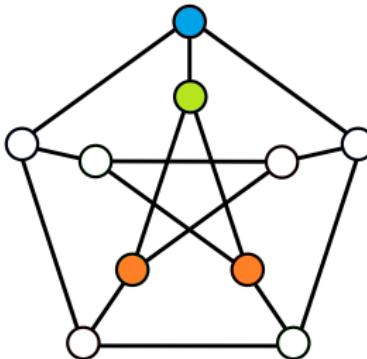
- triviálne prípady — priemer 1 alebo najväčší stupeň 2
- horný odhad $M(d, k) = 1+d+d(d-1)+\dots+d(d-1)^{k-1} = d^k - o(d^k)$
- $M(d, k) = n(d, k)$ iba pre $k = 2$ a $d = 3, 7$ a možno 57

Problém stupňa a vrchola



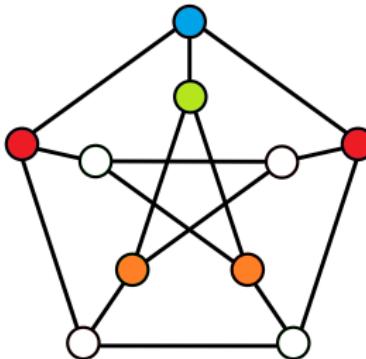
- triviálne prípady — priemer 1 alebo najväčší stupeň 2
- horný odhad $M(d, k) = 1+d+d(d-1)+\dots+d(d-1)^{k-1} = d^k - o(d^k)$
- $M(d, k) = n(d, k)$ iba pre $k = 2$ a $d = 3, 7$ a možno 57

Problém stupňa a vrchola



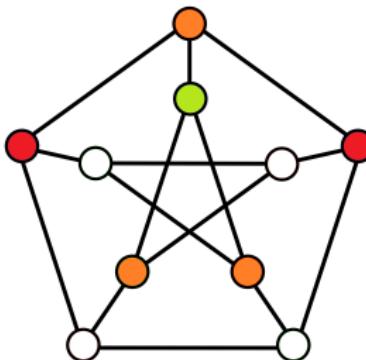
- triviálne prípady — priemer 1 alebo najväčší stupeň 2
- horný odhad $M(d, k) = 1+d+d(d-1)+\dots+d(d-1)^{k-1} = d^k - o(d^k)$
- $M(d, k) = n(d, k)$ iba pre $k = 2$ a $d = 3, 7$ a možno 57

Problém stupňa a vrchola



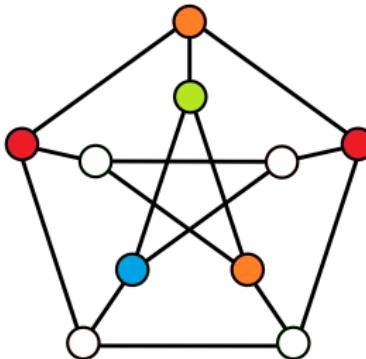
- triviálne prípady — priemer 1 alebo najväčší stupeň 2
- horný odhad $M(d, k) = 1+d+d(d-1)+\dots+d(d-1)^{k-1} = d^k - o(d^k)$
- $M(d, k) = n(d, k)$ iba pre $k = 2$ a $d = 3, 7$ a možno 57

Problém stupňa a vrchola



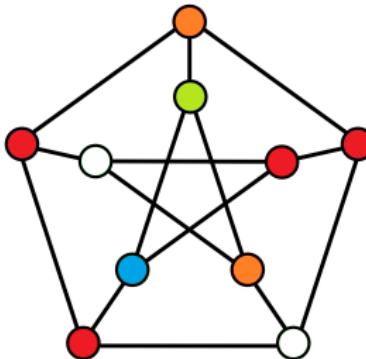
- triviálne prípady — priemer 1 alebo najväčší stupeň 2
- horný odhad $M(d, k) = 1+d+d(d-1)+\dots+d(d-1)^{k-1} = d^k - o(d^k)$
- $M(d, k) = n(d, k)$ iba pre $k = 2$ a $d = 3, 7$ a možno 57

Problém stupňa a vrchola



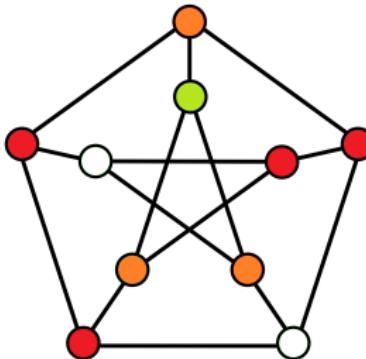
- triviálne prípady — priemer 1 alebo najväčší stupeň 2
- horný odhad $M(d, k) = 1 + d + d(d-1) + \dots + d(d-1)^{k-1} = d^k - o(d^k)$
- $M(d, k) = n(d, k)$ iba pre $k = 2$ a $d = 3, 7$ a možno 57

Problém stupňa a vrchola



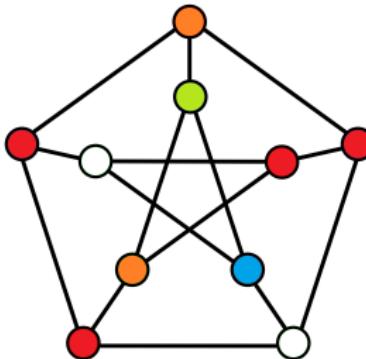
- triviálne prípady — priemer 1 alebo najväčší stupeň 2
- horný odhad $M(d, k) = 1+d+d(d-1)+\dots+d(d-1)^{k-1} = d^k - o(d^k)$
- $M(d, k) = n(d, k)$ iba pre $k = 2$ a $d = 3, 7$ a možno 57

Problém stupňa a vrchola



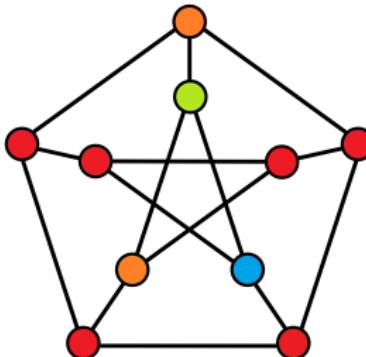
- triviálne prípady — priemer 1 alebo najväčší stupeň 2
- horný odhad $M(d, k) = 1 + d + d(d-1) + \dots + d(d-1)^{k-1} = d^k - o(d^k)$
- $M(d, k) = n(d, k)$ iba pre $k = 2$ a $d = 3, 7$ a možno 57

Problém stupňa a vrchola



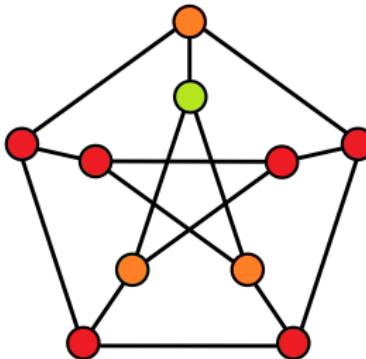
- triviálne prípady — priemer 1 alebo najväčší stupeň 2
- horný odhad $M(d, k) = 1+d+d(d-1)+\dots+d(d-1)^{k-1} = d^k - o(d^k)$
- $M(d, k) = n(d, k)$ iba pre $k = 2$ a $d = 3, 7$ a možno 57

Problém stupňa a vrchola



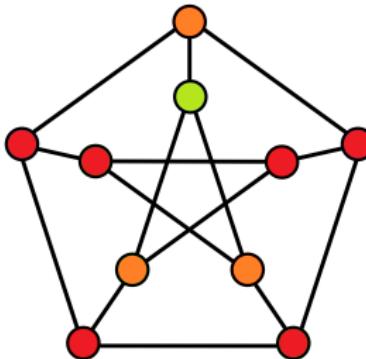
- triviálne prípady — priemer 1 alebo najväčší stupeň 2
- horný odhad $M(d, k) = 1+d+d(d-1)+\dots+d(d-1)^{k-1} = d^k - o(d^k)$
- $M(d, k) = n(d, k)$ iba pre $k = 2$ a $d = 3, 7$ a možno 57

Problém stupňa a vrchola



- triviálne prípady — priemer 1 alebo najväčší stupeň 2
- horný odhad $M(d, k) = 1+d+d(d-1)+\dots+d(d-1)^{k-1} = d^k - o(d^k)$
- $M(d, k) = n(d, k)$ iba pre $k = 2$ a $d = 3, 7$ a možno 57

Problém stupňa a vrchola



- triviálne prípady — priemer 1 alebo najväčší stupeň 2
- horný odhad $M(d, k) = 1 + d + d(d-1) + \dots + d(d-1)^{k-1} = d^k - o(d^k)$
- $M(d, k) = n(d, k)$ iba pre $k = 2$ a $d = 3, 7$ a možno 57

Čo sa skúma?

- existuje graf pre $k = 2$ a $d = 57$?
- vie byť $M(d, k) - n(d, k)$ ľubovoľne veľké?
- vieme sa pre fixné k asymptoticky priblížiť k $M(d, k)$?

Čo sa skúma?

- existuje graf pre $k = 2$ a $d = 57$?
- vie byť $M(d, k) - n(d, k)$ ľubovoľne veľké?
- vieme sa pre fixné k asymptoticky priblížiť k $M(d, k)$?

$$\limsup_{d \rightarrow \infty} n(d, k)/M(d, k) = ?$$

Priblženie k Moorovej hranici

Dá sa to pre $k = 2, 3$ a 5 (Delorme 1985).

Delorme, 1992:

$$\lim \sup_{d \rightarrow \infty} n(d, 4) / M(d, 4) \geq 1/4$$

Canale and Goméz, 2004:

$$\lim \sup_{d \rightarrow \infty} n(d, k) / M(d, k) \geq (1.6)^{-k} \text{ pre } k \geq 6,$$

pričom 1.6 sa dá nahradíť 1.57 pre $k \equiv -1, 0, 1 \pmod{6}$.

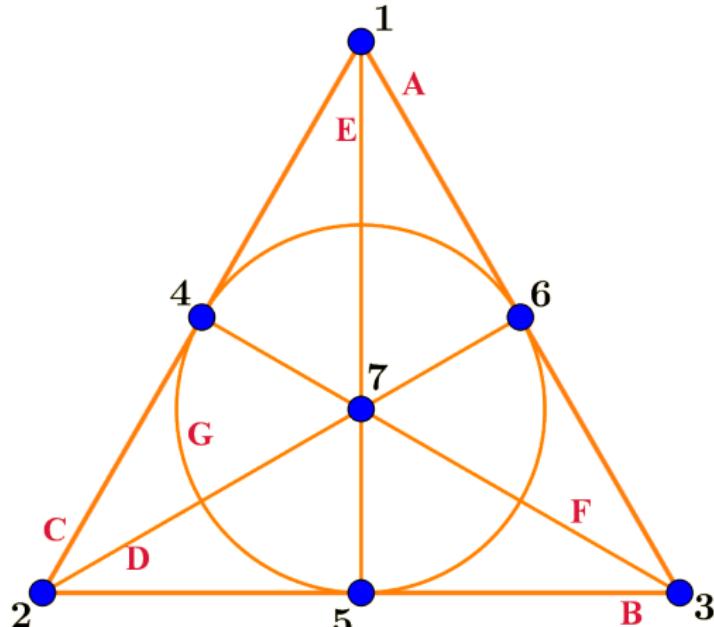
Konečná projektívna rovina rádu q



$$PG(2, 7)$$

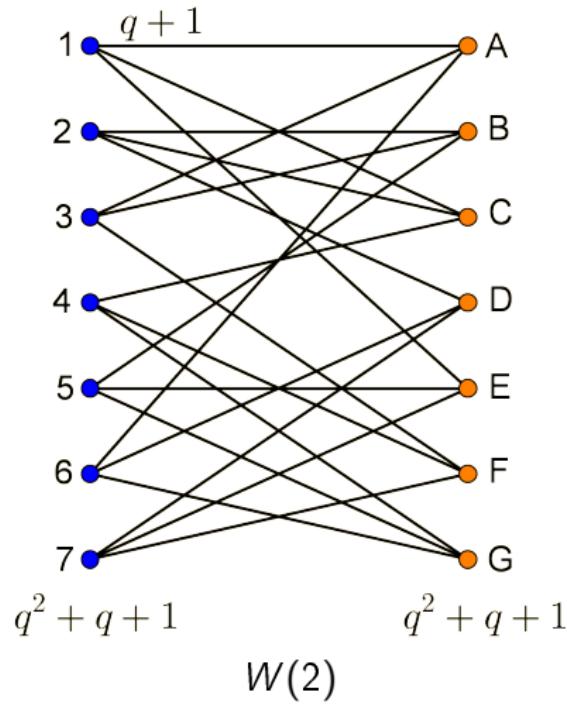
- každé dve rôzne priamky sa pretínajú v práve jednom bode
- každé dva rôzne body ležia na práve jednej spoločnej priamke
- každá priamka obsahuje práve $q + 1$ bodov
- každý bod leží na práve $q + 1$ priamkach
- $|\mathcal{P}| = |\mathcal{L}| = q^2 + q + 1$
- existuje konštrukcia pre $q = p^n$

Incidenčný graf



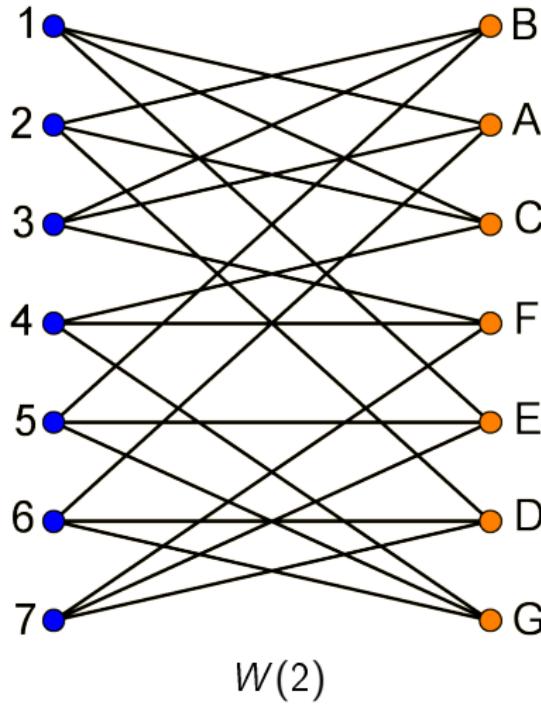
$$PG(2,2)$$

Incidenčný graf



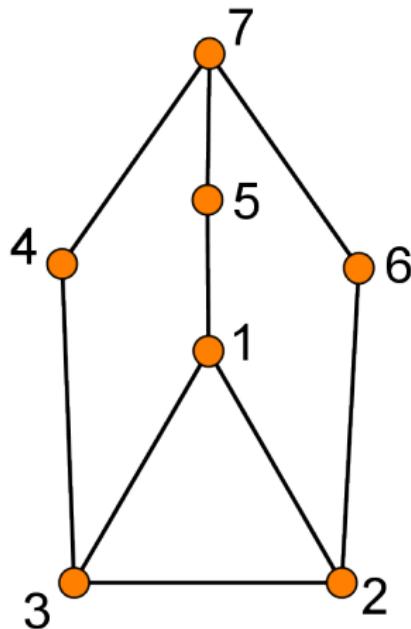
bipartitný graf, stupne vrcholov $q + 1$,
počet vrcholov $2 \cdot (q^2 + q + 1)$

Zlepený graf



zlepíme 'protiľahlé' dvojice bod a priamka

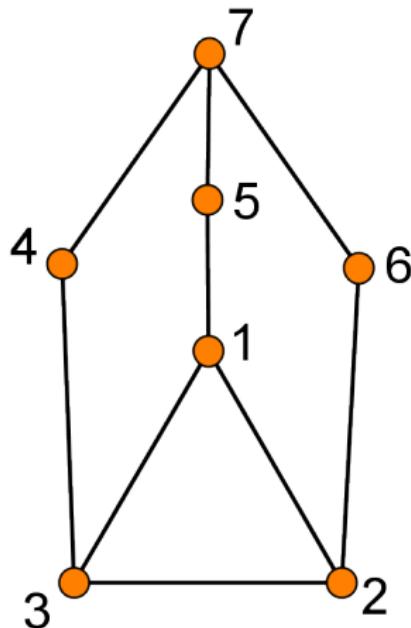
Zlepený graf



$$A(2)$$

graf $A(q)$, stupne vrcholov najviac $q + 1$,
počet vrcholov $q^2 + q + 1$ a priemer

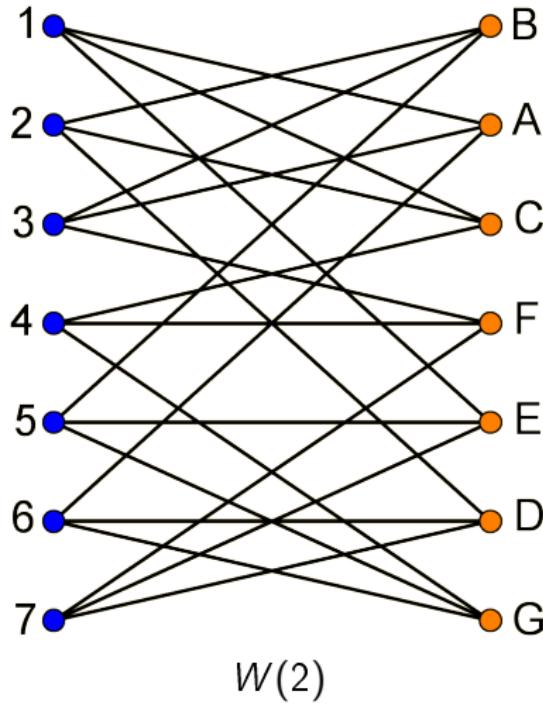
Zlepený graf



$$A(2)$$

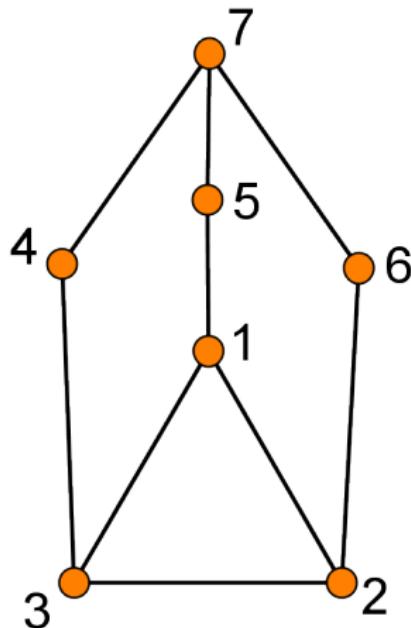
graf $A(q)$, stupne vrcholov najviac $q + 1$,
počet vrcholov $q^2 + q + 1$ a priemer 2

Zlepený graf



zlepíme 'protiľahlé' dvojice bod a priamka

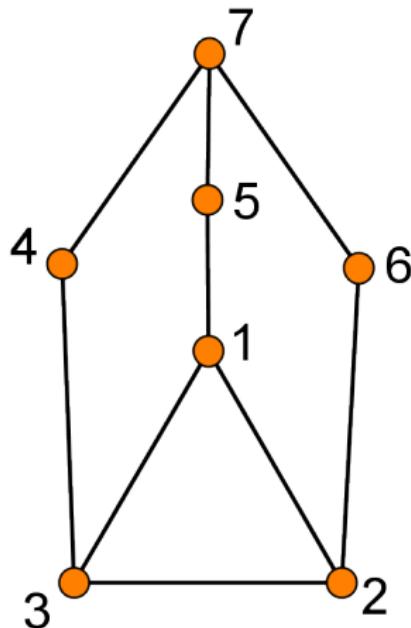
Zlepený graf



$$A(2)$$

graf $A(q)$, stupne vrcholov najviac $q + 1$,
počet vrcholov $q^2 + q + 1$ a priemer

Zlepený graf



$$A(2)$$

graf $A(q)$, stupne vrcholov najviac $q + 1$,
počet vrcholov $q^2 + q + 1$ a priemer 2

Moore-ova hranica a Cayleyho grafy

Rovnaký problém pre užšiu triedu grafov.

Najviac študované — Cayleyho grafy.

$$\limsup_{d \rightarrow \infty} \text{Cay}(d, 2)/M(d, 2) = 1$$

$$\limsup_{d \rightarrow \infty} \text{Cay}(d, 3)/M(d, 3) = 1$$

$$\limsup_{d \rightarrow \infty} \text{Cay}(d, 5)/M(d, 5) = 0.0244140625$$

Konštrukcia Cayleyho grafov

Konštrukcia Cayleyho grafov s priemerom z grafov $A(q)$:

Konštrukcia Cayleyho grafov

Konštrukcia Cayleyho grafov s priemerom z grafov $A(q)$:

- 1 grupa $G \leq \text{Aut}(A(q))$ rádu $q^k - o(q^k)$;

Konštrukcia Cayleyho grafov

Konštrukcia Cayleyho grafov s priemerom z grafov $A(q)$:

- 1 grupa $G \leq \text{Aut}(A(q))$ rádu $q^k - o(q^k)$;
- 2 orbita \mathcal{O} , na ktorej pracuje G regulárne;

Konštrukcia Cayleyho grafov

Konštrukcia Cayleyho grafov s priemerom z grafov $A(q)$:

- 1 grupa $G \leq \text{Aut}(A(q))$ rádu $q^k - o(q^k)$;
- 2 orbita \mathcal{O} , na ktorej pracuje G regulárne;
- 3 doplniť generátory do Cayleyho grafu indukovaného \mathcal{O} .

Takto vytvorené Cayleyho grafy asymptoticky dosahujú Moorovu hranicu pre $k = 2$ (známe inou konštrukciou) a $k = 3$ (silné zlepšenie doterajšieho výsledku).

Priemer 5?

1 Grupa $G \leq \text{Aut}(A(q))$ rádu $q^5 - o(q^5)$.

- Nepoznáme (?) štruktúru $\text{Aut}(A(q))$, dá sa študovať skrz symetrie zovšeobecnených šestuholníkov.
- Grupa $\text{Aut}(A(q))$ obsahuje Reeho grupu $R(q)$ rádu $q^3(q^3 + 1)(q - 1)$.
- Grupa $R(q)$ nemá podgrupu rádu $q^5 - o(q^5)$.